A remark on monads and vector bundles over the projective plane

中本, 和典

代数幾何学シンポジウム記録
1997年度　pp.121-141

A remark on monads and vector bundles over the projective plane

京都大学大学院理学研究科
中本 和典

1 Introduction

個人的には密かにスローガンとして「ベクトル束に親しもう！！」を掲げていた．ベクトル束という対象を，より身近な対象におきかえることにより明らかにしていこうというのが今回の筆者の立場であった．特殊な場合，ベクトル束は monad という，ある種線型代数の範疇で統御できるような対象で記述される．monad は Barth, Hulek といったいろいろな人々により研究されてきた．今回筆者は Hulek [10] に従い，話を展開することになる．

Hulek は [10] で s-stable という概念を定義している．おそらく当時“良い”概念と思われた s-stable であるが，現在あまり major であるとはいえないと思う．（とすると minor．）今回はその s-stable という概念をあえて引っ張り出して，活躍させようと考えている．（本稿が活躍の場を与えたとしてもやはり major な概念になりきれないと思う．）

$\mathbf{P}^2$ 上の vector bundle で μ-stable と s-stable の二つの概念は rank ≤ 3 では一致する．一般に μ-stable は s-stable の範疇に入るが，rank ≤ 4 では一致しない．s-stable vector bundle は Kronecker module もしくは ある quiver の表現として記述される．Kronecker module または quiver の表現には自然に群の作用があり，それに関する軌道が s-stable vector bundle の同型類を与える．Hulek は [10] においてどうも群の作用に関する stable point が μ-stable vector bundle に対応するのではないかと考えていたのではないかと思う．実際 rank $= 2$ の場合や rank $= 3$ かつ $c_2 \leq 7$ の場合にそのことを証明している．本稿ではそのことを任意の rank で証明する．これにより歴史的にはおそらく忘れ去られていた問題が一つ解決することになる．

まず本稿における舞台を紹介しよう. k を代数的閉体とする. V を k 上の 3-dim vector space とし, V^* をその dual space とする. $\mathbf{P}^2 := \mathrm{Proj}\, S(V^*)$ を k 上の射影平面とする.

vector bundle の stability を定義する.

定義 1.1 $\mathcal{F}$ を $\mathbf{P}^2$ 上の coherent sheaf とする. $\mathcal{F}$ が torsion free sheaf であるとは,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}} K(\mathbf{P}^2)$$

が exact のときをいう. ここで $K(\mathbf{P}^2)$ は $\mathbf{P}^2$ 上の有理関数のなす層とする. torsion free sheaf $\mathcal{F}$ に対して $\mu(\mathcal{F}) := \dfrac{c_1(\mathcal{F})}{rk\mathcal{F}}$ と定義する.

定義 1.2 (Mumford-Takemoto) $\mathcal{F}$ を $\mathbf{P}^2$ 上の torsion free sheaf とする.
$\mathcal{F}$ が μ-stable (resp. μ-semistable) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $0 < \mathrm{rk}\mathcal{F}' < \mathrm{rk}\mathcal{F}$ なる任意の coherent subsheaf $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}$ に対し $\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$ が成立する. (resp. $\leq$)

定義 1.3 (Gieseker-Maruyama) $\mathcal{F}$ を $\mathbf{P}^2$ 上の torsion free sheaf とする. $\mathcal{F}$ が stable (resp. semistable) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $0 < \mathrm{rk}\mathcal{F}' < \mathrm{rk}\mathcal{F}$ なる任意の coherent subsheaf $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}$ に対し $\dfrac{\chi(\mathcal{F}'(m))}{\mathrm{rk}\mathcal{F}'} < \dfrac{\chi(\mathcal{F}(m))}{\mathrm{rk}\mathcal{F}}$ が $m \gg 0$ で成立する. (resp. $\leq$)

注意 1.4 vector bundle の stability に関して一般に以下が成立する.

$$\begin{array}{ccc} \mu\text{-stable} & \Longrightarrow & \text{stable} \\ & & \Downarrow \\ \mu\text{-semistable} & \Longleftarrow & \text{semistable} \end{array}$$

また, stable 特に μ-stable であれば simple （すなわち自己準同型が constant 倍のみ）である.

以下議論を $\mathbf{P}^2$ 上の $c_1 = 0$ なるベクトル束に限って行なう.

s-stable の概念を導入しよう.

定義 1.5 (Hulek) $\mathcal{F}$ を $\mathbf{P}^2$ 上の $c_1(\mathcal{F}) = 0$ なるベクトル束とする.
$\mathcal{F}$ が s-stable $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $h^0(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}^\vee) = 0$

注意 1.6 $c_1 = 0$ なるベクトル束に関しては, 以下が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} \mu\text{-stable} & \Longrightarrow & \text{s-stable} \\ \Downarrow & & \\ \text{stable} & & \end{array}$$

rk ≤ 3 のとき s-stable $\Longleftrightarrow$ μ-stable は成立する. しかし rk ≥ 4 のときは一般には成立しない.

一般には stable $\Longrightarrow$ s-stable, s-stable $\Longrightarrow$ stable の両方とも成り立たない. 実際, rank 3 の stable vector bundle であるが μ-stable でも s-stable でもない例がある. (Maruyama による例 cf.[6]) また, s-stable v.b. の直和は再び stable であるが, μ-stable や stable にならない. s-stable と stable は相性が良くないと思われる.

ここで問題提起しよう. 本稿の目標は次の問題の解決である.

問題 1.7 s-stablility と μ-stability の差はどのぐらいあるのか? μ-stability の特徴づけとは一体何か?

2 Monads

ベクトル束を記述する手段として monad がある. $\mathbf{P}^2$ や $\mathbf{P}^3$ においては, monad を使ったベクトル束の話が非常にうまくいく. さっそく monad を定義することにしよう.

定義 2.1 $\mathbf{P}^2$ 上の monad とはベクトル束からなる complex であって,

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \to 0$$

f: 単射, g: 全射, $g \circ f = 0$, $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathcal{B}$ は $\mathcal{B}$ の部分束となっているものをいう.

$\mathcal{F} := \mathrm{Ker}(g)/\mathrm{Im}(f)$ を monad の cohomology bundle という.

monad を構成する手段として, Hulek [10] に従い Kronecker module と呼ばれる概念を導入することにする.

定義 2.2 $n \geq 2$, $k = \overline{k}$ とする. V を k 上の 3-dim vector space, V^* を V の dual space とする. k-linear map $\alpha : k^n \otimes V^* \to k^n$ のことを Kronecker module と呼ぶ.

基底 $z_0, z_1, z_2 \in V^*$ を固定しておく. $i = 0, 1, 2$ に対して

$$\begin{array}{cccc} \alpha_i & : & k^n & \to & k^n \\ & & \phi & \mapsto & \alpha(\phi \otimes z_i) \end{array}$$

と定義する.

特に 1 対 1 対応 $\{\alpha : \text{Kronecker module}\} \longleftrightarrow \{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathrm{M}_n(k)^{\oplus 3}\}$ に注意する.

定義 2.3 (Hulek) $\alpha : k^n \otimes V^* \to k^n$: Kronecker module が prestable $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 0 \neq \forall \phi \in k^n$ に対して k^n の部分空間 $\langle \alpha_0(\phi), \alpha_1(\phi), \alpha_2(\phi) \rangle$ 及び $\langle {}^t\alpha_0(\phi), {}^t\alpha_1(\phi), {}^t\alpha_2(\phi) \rangle$ の次元 ≥ 2.

$\alpha, \beta : k^n \otimes V^* \to k^n$ を Kronecker module とする. α と β が同値であるとは, ある $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{GL}_n(k)$ が存在して, $\omega_1 \alpha_i \omega_2 = \beta_i (i = 0, 1, 2)$ が成り立つときをいう. α と β が同値のとき, $\alpha \sim \beta$ と表すことにする. prestable な Kronecker module と同値なものは再び prestable であることに注意せよ.

Kronecker module α に対して,

$$A(\alpha) := \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & \alpha_0 \\ \alpha_1 & -\alpha_0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3n}(k)$$

と定義する.

さて prestable Kronecker module $\alpha : k^n \otimes V^* \to k^n$ に対して, monad を以下のように構成する. 但し, $v_0, v_1, v_2 \in V$ を $z_0, z_1, z_2 \in V^*$ の dual basis とする.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{A} & & & & \mathcal{B} := \mathrm{Im}A(\alpha) \otimes \mathcal{O} \\ & & \Vert & & & \nearrow & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & k^n \otimes \mathcal{O}(-1) & \longrightarrow & k^n \otimes V \otimes \mathcal{O} & \xrightarrow{A(\alpha)} & k^n \otimes V^* \otimes \mathcal{O} \\ & & & & \phi \otimes v_i & \longmapsto & \alpha_{i+1}(\phi) \otimes z_{i-1} - \alpha_{i-1}(\phi) \otimes z_{i+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathcal{B} & & & & \mathcal{C} & & \\ & & \Vert & & & & \Vert & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Im}A(\alpha) \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & k^n \otimes V^* \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & k^n \otimes \mathcal{O}(1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

以上から monad

$$0 \longrightarrow k^n \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathrm{Im}A(\alpha) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow k^n \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0$$

を得る. Kronecker module α から上の monad をつくり cohomology bundle をとったものを $\mathcal{F}(\alpha)$ とおく.

定理 2.4 (Hulek)

$$\begin{array}{ccc}
\{\alpha : k^n \otimes V^* \to k^n \mid \alpha \textit{ is prestable and } \mathrm{rk}A(\alpha) = 2n + r\}/\sim & \ni & \alpha \\
\downarrow & & \downarrow \\
\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \textit{ is a s-stable vector bundle with } c_2 = n, \mathrm{rk} = r\}/\cong & \ni & \mathcal{F}(\alpha)
\end{array}$$

は全単射を与える.

注意 2.5 $\mathcal{F}$ を s-stable vector bundle で $c_2 = n, \mathrm{rk} = r$ とすると, $h^1(\mathcal{F}(-1)) = h^1(\mathcal{F}(-2)) = n$ となる. さらに $h^2(\mathcal{F}) = 0$, $h^1(\mathcal{F}) = -\chi(\mathcal{F}) = n - r$ (≥ 0) である. 上の全単射の逆写像は s-stable vector bundle に対して $H^1(\mathcal{F}(-2)) \otimes V^* \to H^1(\mathcal{F}(-1))$ をとることにより得られる.

注意 2.6 α を prestable Kronecker module とし, $\mathcal{F}$ を対応する s-stable vector bundle とする. $(x_0, x_1, x_2) \in k^3$ に対して, $x_0\alpha_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \in \mathrm{M}_n(k)$ を考える. このとき,

$$x_0\alpha_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \in \mathrm{GL}_n(k) \Longleftrightarrow \mathcal{F}|_l \cong \mathcal{O}^{\oplus r}$$

が成り立つ. 但し $l = \{x_0 z_0 + x_1 z_1 + x_2 z_2 = 0\} \subset \mathbf{P}^2$

注意 2.7 μ-stable vector bundle $\mathcal{F}$ で $\forall l \subset \mathbf{P}^2$ に対して $\mathcal{F}|_l \not\cong \mathcal{O}^{\oplus r}$ となるものが存在する. (cf.[10])

3 Quivers

Quiver とは簡単にいえば有向グラフのことである. くわしくは [15] にまかせることとして, Quiver の例を示すことにする.

例 3.1 Quiver の例.

$$Q := \quad \begin{tikzcd} \overset{e_0}{\bullet} \arrow[r, bend left, "\alpha_0"] \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[r, bend right, "\alpha_2"'] & \overset{e_1}{\bullet} \end{tikzcd}$$

以降は上の quiver しか使わないが, 今回は特別におまけで quiver の例を奮発する.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[loop right] \arrow[d, shift right] \\ \bullet \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$ こんなのや $$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & \bullet \end{tikzcd}$$ こんなのがある.

定義 3.2 Quiver

$$Q := \begin{tikzcd} \overset{e_0}{\bullet} \arrow[r, bend left, "\alpha_0"] \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[r, bend right, "\alpha_2"'] & \overset{e_1}{\bullet} \end{tikzcd}$$

に対して, path algebra A を次のように定義する. quiver の path (連続する arrow の列) を基底とするような k 上の vector space を考え, 積構造を二つの path がつなげられるならつなげた新たな path を積の結果として決め, つなげられなかったら 0 と定める. vertex も path の一種と見る. 具体的には次のような代数である.

$$A := k[e_0, e_1, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$$

$$e_0^2 = e_0, e_1^2 = e_1, e_0e_1 = e_1e_0 = 0$$

$$\alpha_je_0 = \alpha_j, e_1\alpha_j = \alpha_j, e_0\alpha_j = \alpha_je_1 = 0$$

$$\alpha_i\alpha_j = 0, 1 = e_0 + e_1$$

A は 5-dimensional algebra である.

有限次元 A 加群を考える. $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Hom}_k(k^m, k^n)$ このとき, A 加群 $M := k^m \oplus k^n$ を

$$\begin{array}{cccccc} e_0\cdot & : & k^m \oplus k^n & \longrightarrow & k^m \oplus k^n \\ & & (v, w) & \mapsto & (v, 0) \\ e_1\cdot & : & k^m \oplus k^n & \longrightarrow & k^m \oplus k^n \\ & & (v, w) & \mapsto & (0, w) \\ \alpha_j\cdot & : & k^m \oplus k^n & \longrightarrow & k^m \oplus k^n \\ & & (v, w) & \mapsto & (0, \alpha_j(v)) \end{array}$$

と定義する. このとき, (m, n) を A 加群 M の dimension vector と呼ぶ.

注意 3.3 実は, 有限次元 A 加群は上のようなものでつくされる. $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2 \in \mathrm{Hom}_k(k^m,k^n)$ に対して構成される A 加群を M_γ とする. $\delta_0,\delta_1,\delta_2 \in \mathrm{Hom}_k(k^s,k^t)$ に対して構成される A 加群を M_δ とする. このとき,

$$\mathrm{Hom}_A(M_\gamma,M_\delta) \cong \{(f_0,f_1) \in \mathrm{Hom}_k(k^m,k^s)\oplus\mathrm{Hom}_k(k^n,k^t) \mid \delta_j f_0 = f_1\gamma_j, (j=0,1,2)\}$$

注意 3.4 Kronecker module α に対して, $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ から構成される A-module M_α を対応させることにより次の同型がいえる.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha: & k^n \otimes V^* \to k^n \\ & \text{Kronecker module} \end{array} \right\} \Big/ \sim \xrightarrow{\simeq} \left\{ M \;\middle|\; M : A\text{-module of dimension vector } (n,n) \right\} \Big/$$

定義 3.5 M を A-module of dimension vector (n,n) とする.

M が prestable である $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ M は dimension vector $(1,1)$, $(n-1,n-1)$ なる A-submodule をもたない.

上の prestable A-module の定義は, もちろん Kronecker module の言葉でいうところの prestable と対応している.

定義 3.6 M を A-module of dimension (n,n) とする. このとき

$$r(M) := \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & \alpha_0 \\ \alpha_1 & -\alpha_0 & 0 \end{pmatrix} - 2n$$ とおく.

命題 3.7

$$M(r;0,n)^{s\text{-}stable} := \left\{ \mathcal{F} \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathcal{F}: \ s\text{-stable vector bundle over } \mathbf{P}^2 \\ c_1 = 0, c_2 = n, \mathrm{rk} = r \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{M}od\text{-}A(n;r)^{prestable} := \left\{ M \;\middle|\; \begin{array}{c} M: \ \ prestable\ A\text{-}module\ of\ dimension\ vector\ (n,n) \\ r(M) = r \end{array} \right\}$$

とおく. このとき, 2つの *additive catgory* の同値

$$\bigcup_{2\le r\le n} M(r;0,n)^{s\text{-}stable} \xrightarrow{\simeq} \bigcup_{2\le r\le n} \mathcal{M}od\text{-}A(n;r)^{prestable}$$

がいえる.

雑談 3.8 $\bigcup_{2\le r\le n} M(r;0,n)^{s\text{-}stable}$ という *category* が果たして“良い” *category* であるかどうか疑問の残るところである．実際，加法圏以上の構造を備えているかどうか不明であるし，何か行き当たりばったりの作為的なもののような感じがしてしまう．あくまで暫定的な枠組であって将来どのように修正されるべきか現在のところわからないのが実情である．

k-anti algebra isomorphism S を次のように定義する．

$$\begin{array}{cccc} S: & A & \longrightarrow & A \\ & e_0 & \mapsto & e_1 \\ & e_1 & \mapsto & e_0 \\ & \alpha_j & \mapsto & \alpha_j \end{array}$$

このとき，A-module M of dimension vector (n,n) に対して，$M^\vee := \mathrm{Hom}_k(M,k)$ に A-module structure を $A \xrightarrow{S} A \xrightarrow{{}^t\rho} \mathrm{End}_k(M^\vee)$ で入れる．但し，$\rho: A \to \mathrm{End}_k(M)$ を M の A-module structure に対する ring homomorhism, ${}^t\rho$ をその adjoint とする．このとき，prestable A-module M of (n,n) に対して，$M^\vee$ も prestable A-module M of (n,n) となり，対応する s-stable vector bundle $\mathcal{F}$ も $\mathcal{F}^\vee$ となる．

A には残念ながら Hopf algebra の構造が入らない．また都合の良い bialgebra 構造が見つかっていないので（本当にないのかもしれないが）A-module のテンソル積にうまく A-module の構造が入らない．dual をとる操作しか新たな A-module を作る操作が現在見つかっていない．

問題 3.9 *prestable A-module の category と s-stable vector bundle の category の間の対応に関して辞書を作ろう！！*

例として

(i) s-stable vector bundle の間の morphism が injective もしくは surjective を与えるのは，対応する prestable A-module の間の A-module hom がどのような条件の時か？

(ii) A-module を新たに構成する方法を考え，それが vector bundle の言葉で何に対応するかを考えよ．

といった問題が考えられる．

定義 3.10 (Hulek, A. D. King) M を A-module of (n,n) とする. $(n \geq 2)$
このとき、

(i) M が θ-stable $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M は $0<m<n$ なる A-submodule of (m,m) をもたない.

(ii) M が θ-semistable $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M は $s>t$ なる A-submodule of (s,t) をもたない.

注意 3.11 (A. D. King [13]) 本来, 上の θ-stable の θ には意味がある. $M^{(m,n)}$ を dimension vector (m,n) の A-module として

$$\begin{array}{cccc} \theta & : & K_0(\mathcal{M}od\text{-}A) & \to & \mathbf{Z} \\ & & M^{(m,n)} & \mapsto & n-m \end{array}$$

と定めたときの [13] の意味での θ-stable, θ-semistable に他ならない. すなわち, M が θ-semistable とは任意の A-submodule N に対して $\theta(N) \geq 0$ が成立するときであり, M が θ-stable とは θ-semistable であって 0 と M 以外の A-submodule N について $\theta(N)>0$ が成立するときをいう. 幾何学的には quiver の表現空間にある簡約群が作用して, 適当な linearization に関する stable point, semi-stable point に対応する.

但しここでは都合により, dimension vector が (m,m) $(m \geq 2)$ なる A-module についてのみ θ-stable, θ-semistable を定義することにした.

K群からの準同型 θ を決めなければ, ただ単に θ-stable といっただけではあまり意味がないが, 本編では上の意味で使うことにした.

$$\begin{array}{ccc} (\ \theta\text{-stable}\ ) & \Longrightarrow & (\ \text{prestable}\ ) \\ \Downarrow & & \\ (\ \theta\text{-semistable}\ ) & & \end{array}$$

が成り立つことが容易にわかる. しかし prestable と θ-stable との間には一般に包含関係はない.

定義 3.12 $\mathcal{F}$ を s-stable vector bundle とする.
$\mathcal{F}$ が θ-stable vector bundle $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 対応する prestable A-module M が θ-stable.

θ-stable vector bundle の概念は本稿の終りでは消滅してしまう予定である. 余命残り数ページだけの悲しい存在である.

補題 3.13 *$\mathcal{F}$ が θ-stable ならば、$\mathcal{F}^\vee$ も θ-stable である.*

Proof: $\mathcal{F}$ に対応する θ-stable A-module M をとると, $M^\vee$ は再び θ-stable である. $\mathcal{F}^\vee$ はちょうど $M^\vee$ に対応する. □

補題 3.14 *M, N をそれぞれ A-module of (m,m), (n,n) とする. $f : M \to N$ を 0 でない A-module homomorphism とする.*

(i) M : θ-stable, N : θ-semistable $\Longrightarrow$ f : injective

(ii) M : θ-semistable, N : θ-stable $\Longrightarrow$ f : surjective

Proof: いわゆる「Schur の Lemma」である. ここでは (i) だけを証明することにする. $\mathrm{Ker} f$ の dimension vector を (s,t) とすると, $\mathrm{Ker} f = 0$ でない限り θ-stable module M の submodule として, $s < t$ でなくてはならない. しかしこのとき, $\mathrm{Im} f$ は dimension vector $(m-s, m-t)$ なる θ-semistable module N の submodule なので $m-s > m-t$ であることは矛盾である. したがって $\mathrm{Ker} f = 0$ でなければならない. □

系 3.15 *M, N を θ-stable A-module とする. $f : M \to N$ を 0 でない A-module homomorphism とする. このとき, f は isomorpshim である.*

上の系の主張を vector bundle の言葉に直すと次の系となる.

系 3.16 *$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ を θ-stable vector bundle とする. $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を 0 でない morphism とする. f は isomorphism である.*

蛇足ではあるが, 次が成立する.

系 3.17 *$\mathcal{F}$ を θ-stable vector bundle とする. このとき, $\mathcal{F}$ は simple i.e.* $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}}(\mathcal{F}) \cong$ *k である.*

Proof: $\phi \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}}(\mathcal{F})$ を任意にとる. $x \in \mathbf{P}^2$ をとり, $\phi \otimes k(x) : \mathcal{F} \otimes k(x) \to \mathcal{F} \otimes k(x)$ の固有値の一つを c とすると, $\phi - c \cdot \mathrm{Id}$ は同型になり得ない. 前系からこれは zero morphism に他ならないことがわかり, $\phi = c \cdot \mathrm{Id}$ である. □

4 Lemma in Linear Algebra

この節では, 雰囲気を一新して線型代数をしましょう. 時間のある方は以下の補題を解答を見ずに証明を考えてはいかがでしょうか. ちなみに筆者は証明に 1 ヶ月ほどかかりました. あとで得意がって石井 亮さんに出題してみると数日して解答が返ってきたので, 非常に落胆したのを覚えています. 以下の 2 つの補題の証明は石井 亮さんによるものです.

補題 4.1 $k=\overline{k}$, $n \geq 2$ とする. $A_i \in \mathrm{M}_n(k)$ $(i=0,1,2)$ について

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & A_2 & -A_1 \\ -A_2 & 0 & A_0 \\ A_1 & -A_0 & 0 \end{pmatrix} \leq 2n+1$$

と仮定する.

このとき, 部分空間 $W_1, W_2 \subseteq k^n$ が存在して

$$0 < \dim W_1 = \dim W_2 < n$$

$$A_j(W_1) \subseteq W_2 \; (j=0,1,2)$$

が成り立つ.

補題 4.1 を証明する前に, まず次の補題を証明することにする.

補題 4.2 $n \geq 2$ とする. $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ に対して, $\mathrm{rk}[A,B] \leq 1$ とする. 但し, $[A,B] := AB - BA$ とする.

このとき *nontrivial* な部分空間 $0 \subset W \subset k^n$ が存在して, W は A, B 不変である.

補題 4.2 の証明:

[21] には標数 0 のときの証明が書いてあるが, ここでは一般標数の場合に証明する. 以下の石井さんによるエレガントな証明を御堪能下さい.

まず $[A,B]=0$ を仮定する. A, B は互いに相手の広義固有空間を不変にするので A, B は初めからただ一つの固有値をもつとして主張を示せばよい. A が scalar 行列

であれば主張は明らかなので, A は scalar 行列でないとしてよい. このとき A の狭義固有空間は B 不変でありこれが求める部分空間となる.

$\mathrm{rk}[A,B]=1$ の場合のときを証明する. A の固有値の一つ λ をとり, A の代わりに $A-\lambda I_n$ を考えてもよい. $\det A=0$ を最初から仮定してよい. $A\neq 0$ に注意する. $\mathrm{Im}[A,B]=k\cdot v$ $(v\neq 0)$ とおいて, 二通りに場合わけをして主張を証明する.

(Case 1) $v\in \mathrm{Im}A$ のとき

$\forall x\in k^n$ に対し,

$$BAx=-[A,B]x+ABx\in \mathrm{Im}[A,B]+\mathrm{Im}A\subseteq \mathrm{Im}A$$

が成り立つので, $B(\mathrm{Im}A)\subseteq \mathrm{Im}A$ がいえる. ゆえに $\mathrm{Im}A$ が A,B 不変な部分空間としてとれる.

(Case 2) $v\notin \mathrm{Im}A$ のとき

このとき, $\mathrm{Im}A\cap\mathrm{Im}[A,B]=0$ である. $\forall x\in \mathrm{Ker}A$ に対して,

$$\begin{aligned} ABx &= [A,B]x+BAx \\ &= [A,B]x \quad (\in \mathrm{Im}A\cap \mathrm{Im}[A,B]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって $B(\mathrm{Ker}A)\subseteq \mathrm{Ker}A$. ゆえに $\mathrm{Ker}A$ が A,B 不変な部分空間としてとれる. □

さて, 補題 4.1 の証明にうつろう.

補題 4.1 の証明 :

$$\Phi:=\begin{pmatrix} 0 & A_2 & -A_1 \\ -A_2 & 0 & A_0 \\ A_1 & -A_0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく.

(Case 1) A_2 が正則の場合

A_i に正則行列 P を乗じて PA_iP^{-1} を代わりに考えて主張を証明しても構わない. $A_2=I_n$ としてよい. 行列 Φ は, 基本変型により

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n & -A_1 \\ -I_n & 0 & A_0 \\ 0 & 0 & [A_1,A_0] \end{pmatrix}$$

とできる. $\mathrm{rk}\Phi=2n+\mathrm{rk}[A_1,A_0]$ となるので仮定より $\mathrm{rk}[A_1,A_0]\leq 1$.

すると補題 4.2 を使えば, A_0, A_1 に共通な不変部分空間がとれ, 主張が成立する.
(Case 2) A_2 が正則でない場合

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & k^n \oplus k^n \oplus k^n & \to & k^n \oplus k^n \oplus k^n \\ & & (x_0, x_1, x_2) & \mapsto & (A_1x_2 - A_2x_1, A_2x_0 - A_0x_2, A_0x_1 - A_1x_0) \end{array}$$

とおく. 標準基底で ϕ の表現行列をあらわすと Φ となる. 第 j 射影を $p_j : k^n \oplus k^n \oplus k^n \to k^n$ とおく. $(j = 0, 1, 2)$ $\overline{p}_j := p_j |_{\mathrm{Im}\phi}$: $\mathrm{Im}\phi \to k^n$ とおく.

まず $\mathrm{Im}A_i + \mathrm{Im}A_j = k^n$ $(i \neq j)$ であると仮定してよいことを説明しよう. 例えば $W := \mathrm{Im}A_0 + \mathrm{Im}A_1 \neq k^n$ と仮定する. $W = 0$ なら A_2 の固有空間を適当にとればよい. $W \neq 0$ なら $A_2^{-1}(W)$ から次元が $\dim W$ になるような部分空間 W_1 をとり, $W_2 := W$ とすればよい. 以上から $\mathrm{Im}A_i + \mathrm{Im}A_j = k^n$ と仮定してよいことがわかった.

すると, $p_j(\mathrm{Im}\phi) = k^n$ となる $(j = 0, 1, 2)$. $\dim \mathrm{Im}\phi \leq 2n + 1$ より $\dim \mathrm{Ker}\,(\overline{p}_j) \leq n + 1$ が出る.

$$\begin{aligned} \overline{p}_1(\mathrm{Ker}(\overline{p}_0)) &= \{A_2x_0 - A_0x_2 \mid \exists x_1 \text{ s.t. } A_2x_1 = A_1x_2\} \\ &= \mathrm{Im}A_2 + A_0(A_1^{-1}(\mathrm{Im}A_2)) \end{aligned} \tag{1}$$

に注意して二通りに場合わけする.

(i) $A_0(A_1^{-1}(\mathrm{Im}A_2)) \subseteq \mathrm{Im}A_2$ のとき

$A_j(A_1^{-1}(\mathrm{Im}A_2)) \subseteq \mathrm{Im}A_2$, $(j = 0, 1, 2)$ が成り立つ. A_2 は正則でないので, $\mathrm{Im}A_2 \neq k^n$ である. $\mathrm{Im}A_2 \neq 0$ のときは $W_2 := \mathrm{Im}A_2$, W_1 として $(A_1^{-1}(\mathrm{Im}A_2))$ から次元 W_2 だけ部分空間を適当にとればよい.

$\mathrm{Im}A_2 = 0$ のとき $\mathrm{Im}A_j + \mathrm{Im}A_2 = k^n$ より A_0, A_1 が正則としてよい. 適当に正則行列 P を乗じて PA_0P^{-1}, PA_1P^{-1} を考えてもよく, $A_0 = I_n$ としてよい. このとき A_1 の固有空間を適当にとればよい.

(ii) $A_0(A_1^{-1}(\mathrm{Im}A_2)) \not\subseteq \mathrm{Im}A_2$ のとき

$\dim \overline{p}_1(\mathrm{Ker}\overline{p}_0) \geq \mathrm{rank}A_2 + 1$ が成り立つ. (1) より

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ker}\overline{p}_0 \cap \mathrm{Ker}\overline{p}_1) &\leq \dim \mathrm{Ker}\overline{p}_1 - (\mathrm{rank}A_2 + 1) \\ &\leq n + 1 - (\mathrm{rank}A_2 + 1) \\ &= n - \mathrm{rank}A_2 \\ &= \dim \mathrm{Ker}A_2 \end{aligned}$$

ゆえに $\dim \overline{p}_2(\mathrm{Ker}\overline{p}_0 \cap \mathrm{Ker}\overline{p}_1) \leq \dim \mathrm{Ker}A_2$. $W_1 := \mathrm{Ker}A_2$ とおき, W_2 として $\overline{p}_2(\mathrm{Ker}\overline{p}_0 \cap \mathrm{Ker}\overline{p}_1)$ を含む $\dim \mathrm{Ker}A_2$ だけ次元をもつ部分空間をとる.

$$\begin{aligned}\overline{p}_2(\mathrm{Ker}\overline{p}_0 \cap \mathrm{Ker}\overline{p}_1) &= \{A_0x_1 - A_1x_0 \mid \exists\, x_2 \text{ s.t. } A_2x_1 = A_1x_2, A_0x_2 = A_2x_0\} \\ &\supseteq A_1(\mathrm{Ker}A_2) + A_0(\mathrm{Ker}A_2)\end{aligned}$$

より $A_j(W_1) \subseteq W_2$ がいえ, 主張がいえた. □

以上の線形代数での結果を pathalgebra A 上の話に翻訳すると次のようになる.

系 4.3 *M を A-module of (m, m) とする. $(m \geq 2)$*
M が θ-stable であれば, $r(M) \geq 2$ である.

5 $\mu = \theta$

この節では本稿の Main Theorem を紹介する. 実は μ-stable と θ-stable は同値となることがわかる. これで当初目標にしていた問題が解決されるわけである.

Main Theorem を証明するためにまず次の非常に有効な補題を証明しよう.

補題 5.1 (Inaba-Akahori) [1] *$\mathcal{F}$ を $\mathbf{P}^2$ 上の $c_1(\mathcal{F}) \geq 0$ なる vector bundle とする. このとき,*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

なる μ-stable vector bundle $\mathcal{E}$ が存在して, $c_1(\mathcal{E}) = 0$ が成り立つ.

Proof: いくつかステップにわける.

(Step 1) $\mathcal{F}$ vector bundle with $c_1(\mathcal{F}) \geq 0$ に対して, $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ (exact) なる μ-stable vector bundle $\mathcal{E}$ with $0 \leq c_1(\mathcal{E}) < \mathrm{rk}\mathcal{E}$ が存在する.

proof of Step 1: Harder-Narasimhan filtration と Jordan-Hörder filtration により, $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ なる μ-stable coherent sheaf $\mathcal{E}$ with $\mu(\mathcal{E}) \geq \mu(\mathcal{F}) \geq 0$ が存在する. double dual $0 \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mathcal{F}$ をとれば, $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ は μ-stable vector bundle となり, $\mathcal{O}(-1)$ を適当に twist していけば $0 \leq c_1 < \mathrm{rk}$ とできる.

(Step 2) $\mathcal{F}$ を vector bundle with $c_1(\mathcal{F}) > 0$ とする. このとき $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ (exact) となる vector bundle $\mathcal{E}$ with $c_1(\mathcal{E}) = 0$ が存在する.

[1] 筆者の後輩の稲場 道明氏と赤堀 喜信氏に証明をつけていただいた. この程度の主張にお二人の名前を出すのはむしろ失礼かもしれないが, 感謝の意味で敢えて出させていただいた.

proof of Step 2: まず $\mathcal{O}(-1)$ を twist してもよいから $0 < c_1(\mathcal{F}) < \mathrm{rk}\mathcal{F} =: r$ と仮定してよい. line $l \subset \mathbf{P}^2$ をとり, 次の exact sequence を考える.

$$0 \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}|_l \to 0$$

このとき,

$$\mathcal{F}|_l \cong \mathcal{O}_l(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_l(a_r)$$

とおき, $0 < i := c_1(\mathcal{F}) < r$ とする. 全射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}|_l \to \mathcal{O}_l(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_l(a_{r-i})$ の Kernel $\mathcal{E} := \mathrm{Ker}\varphi$ をとると, $c_1(\mathcal{E}) = 0$ である. 必要があれば double dual をとればよい.

さて $\mathrm{rk}\mathcal{F}$ に関する帰納法で主張を証明しよう. $\mathrm{rk}\mathcal{F} = 1$ のときは明らかであるから $\mathrm{rk}\mathcal{F} > 1$ とする. Step 1 より $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ なる μ-stable vector bundle with $0 \le c_1(\mathcal{E}) < \mathrm{rk}\mathcal{E}$ が存在する. $c_1(\mathcal{E}) = 0$ なら O.K. $\mathrm{rk}\mathcal{E} < \mathrm{rk}\mathcal{F}$ でも帰納法の仮定より O.K.

$\mathrm{rk}\mathcal{E} = \mathrm{rk}\mathcal{F}$ かつ $c_1(\mathcal{E}) > 0$ と仮定して話を進める.

Step 2 より $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ なる vector bundle $\mathcal{E}'$ with $c_1(\mathcal{E}') = 0$ が 存在する. $\mathrm{rk}\mathcal{E}' < \mathrm{rk}\mathcal{E}$ なら帰納法の仮定より O.K. なので $\mathrm{rk}\mathcal{E}' = \mathrm{rk}\mathcal{E}$ としてよい.

$\mathcal{E}'$ に対し再び Step 1 を使うと $0 \to \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'$ なる μ-stable vector bundle $\mathcal{E}''$ with $c_1(\mathcal{E}'') \ge 0$ が存在することがわかる. 以前と同様, $\mathrm{rk}\mathcal{E}'' = \mathrm{rk}\mathcal{E}'$ として示せば良い.

このとき $\mathcal{E}''$ と $\mathcal{E}'$ が同型であることを示す. それが示されれば $\mathcal{F}$ は $c_1 = 0$ なる μ-stable vector bundle を subsheaf としてもつことが証明される.

さて $0 \to \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'$ の determinant bundle をとると $0 \to \det\mathcal{E}'' \to \det\mathcal{E}'$ injective となり $c_1(\mathcal{E}'') \ge c_1(\mathcal{E}') = 0$ であるから全射もいえる. 特に $\mathcal{E}'' \cong \mathcal{E}'$ がいえる.

以上により主張が証明された. □

準備はそろった. Main Theorem を紹介しよう.

定理 5.2 *s-stable vector bundle* に対して,

$$\mu\text{-stable} \Longleftrightarrow \theta\text{-stable}$$

が成り立つ.

Proof: 命題 (Q_n) を考える.

(Q_n) : $\mathcal{F}$ is μ-stable with $2 \le \mathrm{rk} \le n \Longrightarrow \exists\, \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ generically surjective s.t. $\mathcal{E}$ is θ-stable

但し, $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ が generically surjective であるとは $\mathbf{P}^2$ の generic point で surjective のときをいう.

まず最初に (Q_n) が任意の $n \geq 2$ に対して成立することを示そう. そのために $(Q_n) \Longrightarrow (Q_{n+1})$ を示す. (Q_2) が成立することは以下の議論を追えば分かる.

$\mathcal{M}$ を μ-stable of rank $\leq n+1$ とする. $\mathcal{M}$ が θ-stable でないと仮定して話を進めて良い. M を $\mathcal{M}$ に対応する prestable A-module とする. M の A-submodule のうち dimension vector が (p,p) の形をしたもので p が最小なものを N とする. このとき N は θ-stable A-module である. (M が prestable であることから $p \geq 2$ であることに注意せよ.) Cor 4.3 より $r(N) \geq 2$ である. そこで N に対応する θ-stable vector bundle を $\mathcal{T}$ とする. A-module の injection $0 \to N \to M$ から induce される vector bundle の間の non-zero な morphism $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{M}$ を考える.

φ が generically surjective ならよい. そこで $\mathrm{rk}(\mathrm{Im}\varphi) < \mathrm{rk}\mathcal{M}$ と仮定して矛盾を示そう. もし φ が単射なら $\mu(\mathcal{T}) = 0$ という事実から $\mathcal{M}$ の μ-stability に反する. よって $\mathrm{Ker}\varphi \neq 0$ としてよい.

さて $0 \to \mathcal{H} := (\mathrm{Im}\varphi)^{\vee\vee} \to \mathcal{M}$ とおくと $\mathrm{rk}\mathcal{H} < \mathrm{rk}\mathcal{M}, \mathrm{rk}\mathcal{T}$ である. $\mathcal{M}$ の μ-stability より $c_1(\mathcal{H}) < 0$ である. また $\mathcal{T} \to \mathcal{H}$ generically surjective より $0 \to \mathcal{H}^\vee \to \mathcal{T}^\vee$ injective である. (注意. この段階で (Q_2) が正しいことがわかる. $\mathcal{M}$ が rank 2 だと仮定すると $\mathcal{H}^\vee$ は $c_1(\mathcal{H}^\vee) > 0$ なる line bundle で $h^0(\mathcal{T}^\vee) \neq 0$ となり, $\mathcal{T}$ が θ-stable であることに反するからである. これで帰納法がうまく機能する.)

$c_1(\mathcal{H}^\vee) > 0$ より Lemma 5.1を使えば $0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{H}^\vee$ injective なる μ-stable vector bundle $\mathcal{M}_1$ with $c_1(\mathcal{M}_1) = 0$ が存在する. $0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{T}^\vee$ injective であり, $h^0(\mathcal{T}^\vee) = 0$ より $\mathcal{M}_1 \not\cong \mathcal{O}$ である. 特に $\mathrm{rk}\mathcal{M}_1 \geq 2$ である. また $\mathrm{rk}\mathcal{M}_1 \leq \mathrm{rk}\mathcal{H} \leq n$. すると (Q_n) が使えて $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{M}_1$ generically surjective なる θ-stable vector bundle $\mathcal{T}_1$ が存在する. このとき θ-stable vector bundle の間の non-zero morphism $\exists\psi : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{T}^\vee$ が存在する. Cor 3.16 より ψ は isomorphism となるが rank の小さい $\mathcal{M}_1$ を through することはない. 矛盾が生じ, これで (Q_{n+1}) が示せた.

以上より, 「$\mathcal{F}$ is μ-stable of rank $\leq 2 \Longrightarrow \exists\, \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ generically surjective s.t. $\mathcal{E}$ is θ-stable」がいえた.

次に「$\mathcal{F} : \theta\text{-stable} \Longrightarrow \mu\text{-stable}$」をいう.

$\mathcal{F}$ が μ-stable でないと仮定して矛盾を示そう. そのとき $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ injective なる vector bundle $\mathcal{E}$ で $0 < \mathrm{rk}\mathcal{E} < \mathrm{rk}\mathcal{F}$ かつ $c_1(\mathcal{E}) \geq 0$ をみたすものが存在する. $\mathcal{E}$ に Lemma 5.1を適応すれば, $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{E}$ injective なる μ-stable vector bundle $\mathcal{M}$ with $c_1 = 0$ が存在する. $h^0(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{M}) = 0$ であり, $\mathcal{M} \not\cong \mathcal{O}$. 特に $\mathrm{rk}\mathcal{M} \geq 2$. 先

程証明した結果から $\mathcal{T} \to \mathcal{M}$ generically surjective なる θ-stable vector bundle $\mathcal{T}$ が存在する．以上の morphism を合成すると θ-stable vector bundle 間の non-zero morphism $\mathcal{T} \to \mathcal{F}$ が出来るが, Cor 3.16 より同型となる．ところが rank の小さい $\mathcal{E}$ を through しているのでこれは矛盾である．以上から $\mathcal{F}$ が μ-stable であることが示された．

最後に「$\mathcal{F}$: μ-stable $\Longrightarrow$ θ-stable」であることを示そう．

$\mathcal{F}$ が μ-stable であるとするとある θ-stable vector bundle $\mathcal{T}$ が存在して $\psi : \mathcal{T} \to \mathcal{F}$ generically surjective となる．ところが $\mathcal{T}$ は θ-stable であるので μ-stable であり, ψ が同型であることが示される．よって $\mathcal{F}$ は θ-stable であることがわかった． □

6 Appendix

講演で述べられなかったことを補足しようと思う．

まず, free monoid の表現との関連から．Γ_2 を生成元が 2 の free monoid とし, α_1, α_2 をその生成元とする．free monoid Γ_2 の表現 $\rho : \Gamma_2 \to \mathrm{M}_n(k)$ を与えることと, 2 個の行列 $\rho(\alpha_1), \rho(\alpha_2)$ を与えることは等価である．

このとき,

$$\begin{array}{ccc} \{\rho : \Gamma_2 \to \mathrm{M}_n(k)\} & \to & \{\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \text{ monad }\} \\ \rho & \mapsto & (I_n, \rho(\alpha_1), \rho(\alpha_2)) \end{array}$$

なる対応により,

$$\{\rho : \Gamma_2 \to \mathrm{M}_n(k) \mid \mathrm{rk}[\rho(\alpha_1), \rho(\alpha_2)] = r, \text{ prestable }\}/_{\cong}$$

と

$$\{\mathcal{F} \mid \text{ s-stable v. b. with } c_1 = 0, c_2 = n, \mathrm{rk} = r, \mathcal{F}|_{l_\infty} \cong \mathcal{O}^{\oplus r}\}/_{\cong}$$

が等価となる．ここで, $l_\infty = \{z_0 = 0\} \subset \mathbf{P}^2$ である．

実は free monoid Γ_2 の既約表現全体が, l_∞ に制限すると trivial になるような θ-stable すなわち μ-stable vector bundle と対応することがわかる．Γ_2 の character variety （すなわち moduli scheme of equivalence of irreducible representations. 詳しくは [17] ）と framed moduli of μ-stable vector bundle が結び付いたことになる．

ところがこれは, μ-stable vector bundle の全体を尽くさないことに注意する．（cf. 注意 2.7）

次に触れたい事柄は θ-stable A-module は μ-stable vector bundle に対応したが, θ-semistable A-module に対応するのは何か？ということである.

問題 6.1 *θ-semistable A-module* に対応する対象は何か？例えば *μ-semistable torsion free sheaf* か？

この問題はまだよくわかっていない. このことに関連して [18] や [1] の内容を言及しよう.

quiver $Q' =$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & \bullet \end{tikzcd}$$

の表現で symmetric relation をみたす空間を考える. 適当な dimension vector と θ を選んだとき, θ-stable module の同型類のなす moduli space が $\mathbf{P}^2$ 上の Gieseker-Maruyama stable sheaves の moduli に一致することが知られている.

こういうことが段々わかってくるとなぜ Q の方の stable point に μ-stability が出てきて, Q' の方では Gieseker-Maruyama stability が出てくるのかが個人的には不思議な気がする.

そこで次の疑問が浮かび上がる.

問題 6.2 他の枠組ではどうなのか？ 例えば *Quiver* を変えてみてはどうか？どのような *vector bundle* が出て来得るのか？それとも Q や Q' はやっぱり $\mathbf{P}^2$ 上の *vector bundle* にとって特別であり, これ以上の枠組は本質的にないのか？極論を言うと *μ-stable* や *Gieseker-Maruyama stable* は自然な概念であり, こういう特別な概念は他には有り得ないのか？

tilting sheaf を用いて, variety 上の coherent sheaf の bounded derived category と ある有限次元 algebra 上の module の bounded derived category との同値性がいえる. (例えば [14])

ところが個人的趣味を言うと coherent sheaf の category の subcategory とある algebra 上の module の category の subcategory を "うまく" 選び, derived category までいかないでなんとか同値性がいえないものかと考える. 前の問題と重なる部分があるが, 問題提起すると次のようになる.

問題 6.3 *coherent sheaf* の *category* の *subcategory* をうまくとり, 良く分かった（もしくは取り扱いやすい）対象に置き換えることができるか？例えば *s-stable* のような概念がないか？

今回議論を行なったのは $c_1 = 0$ の場合であった. おそらく一般の c_1 の場合にもこれと似たような議論ができるのではないかと楽観視している. Gieseker-Maruyama stable の方では先程の Q' の表現で記述されることが知られている. となると μ-stable についても何かいえるのではないか.

問題 6.4 本稿のような話を一般の c_1 についてできるか?

$c_1 = 0$ のとき, rank が 2 や 3 の場合には μ-stable と s-stable が一致するため比較的 μ-stable を check するのは容易である. ところが rank が 4 以上だとどうするか?

問題 6.5 *μ-stablity* の判定法に本稿の議論は使えるであろうか?

果たして本当にできるかわからない. いい加減なことを言っているに過ぎない.

monad の話は $\mathbf{P}^2$ だと非常にうまくいく. では他の surface ではどうか? vector bundle を記述するものとして monad に代わるものは果たしてあるのか?

問題 6.6 $\mathbf{P}^2$ 以外の *surface* もしくは高次元の *variety* 上の *vector bundle* を記述せよ.

最後はつかみどころのない問題提起に明け暮れたが, この辺でおわることにしよう.

本文の後ろで論文リストを作りたかったが筆者の知識の乏しさに遮られて満足のいくものが出来そうにないが, 幾つか紹介する.

[4] は monad に関する基本的な文献である. 実を言うと, 筆者はここから勉強し始めた. [10] は本稿が主に引用した論文である. [12] も基本的な文献としてあげておく. [6] は $\mathbf{P}^n$ 上のベクトル束に関して書かれた本. Barth, Hulek らの論文で [2], [3], [11] がある. [9] ではベクトル束に関する諸問題が述べられている. [16] をあげておこう. quiver と torsion free sheaf と Hilbert scheme が関連づけられて語られている. [8],[19] は実を言うと筆者は内容を知らないのであるが, 人から紹介された重要な文献なのであげておく. [13] は quiver の表現空間に関する文献として非常に重要であると思われる. [15] も基本的な本である. quiver に関してはこの本に依るところが多い. [1], [18] も挙げておくべきであろう. [7] も問題 6.6 に関して重要であると思われる. まだ取りこぼした文献があると思う. 中途半端に終わってしまった.

参考文献

[1] H. Walter A. D. King, *On chow rings of fine moduli spaces of modules*, J. reine angew. Math. **461** (1995), 179–187.

[2] W. Barth, *Moduli of vector bundles on the projective plane*, Inventiones math. **42** (1977), 63–91.

[3] ______, *Some properties of stable rank-2 vector bundles on* $\mathbf{P}_n$, Math. Ann. **226** (1977), no. 2, 125–150.

[4] W. Barth and K. Hulek, *Monads and moduli of vector bundles*, Manuscripta Math. **25** (1978).

[5] A. I. Bondal, *Representation of associative algebras and coherent sheaves*, Math. USSR Izvestiya **34** (1990), no. 1, 23–42.

[6] H. Spindler C. Okonek, M. Schneider, *Vector bundles on complex projective spaces*, Prog. in Math. 3, Birkhäuser, 1980.

[7] J.-M. Drezet, *Exceptional bundles and moduli spaces of stable sheaves on* $\mathbf{P}_n$., London Math. Soc. Lecture Note Ser., 208, pp. 101–117, Cambridge Univ. Press, 1995.

[8] Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Math. Soc., 1988.

[9] R. Hartshorne, *Algebraic vector bundles on projective spaces: A problem list*, Topology **18** (1979), 117–128.

[10] K. Hulek, *On the classification of stble rank-r vector bundles over the projective plane*, Vector Bundles and Differential Equations, Prog. in Math. 7, pp. 113–144.

[11] ______, *Stable rank-2 vector bundles on* $\mathbf{P}_2$ *with* c_1 *odd* , Math. Ann. **242** (1979), no. 3, 241–266.

[12] J. Le Potier J. M. Drezet, *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbf{P}_2$, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série (1985), no. t. 18.

[13] A.D. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford (2) **45** (1994), 513–530.

[14] L.Hille, *Tilting line bundles and moduli of thin sincere representations of quivers*, An. St. Univ. Ovidius Constantza **4** (1996), no. f. 2, 76–82.

[15] M. Auslander, I. Reiten, S. Smal∅, *Representation theory of artin algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics 36, Cambridge University Press, 1995.

[16] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, 1996, Preliminary Version.

[17] K. Nakamoto, *Representation varieties and chracter varieties*, preprint, Kyoto-Math 97-11, 1997.

[18] J. Le Potier, *A propos de la construction de l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif*, Bull. Soc. math. France **122** (1994), 363–369.

[19] Rudakov, *Helices and vector bundles*, London Math. Soc., 1990.

[20] A. N. Rudakov, *The Markov numbers and exceptional bundles on* $\mathbf{P}^2$, MAth. USSR Izvestiya **32** (1989), no. 1.

[21] G. Elencwajg W. Barth, *Concernant la cohomologie des fibres algébeiques stables sur* $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, LN 683, Springer, 1978.